Examen de Modélisation Géométrique

1 feuille recto-verso manuscrite autorisée

1 heure

31 Mars 2017

Les trois exercices sont indépendants et notés respectivement sur 7, 3 et 2 points. Le barème est donné à titre indicatif (et l'examen est noté sur 10 + 2 points bonus).

1 Coordonnées barycentriques et schéma à 4 points (adaptatif)

1. Rappelez ce qu'est une combinaison affine, et son lien avec les barycentres.

2. Soit une liste de 4 points P_0, P_1, P_2, P_3. On définit le barycentre $P_{1.5}$ de ces quatre points avec les coefficients $(-1/16, 9/16, 9/16, -1/16)$. Pour 4 points dans une position arbitraire, construisez le barycentre ainsi défini.

3. Montrer que si L est le polynôme de Lagrange tel que $L(i) = P_i$, alors $L(1.5) = P_{1.5}$.

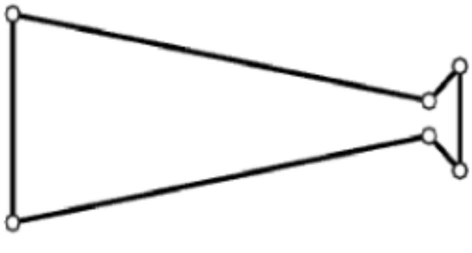
4. Le point $P_{1.5}$ est-il dans l'enveloppe convexe des 4 points P_i, $i = 0, 1, 2, 3$? Justifiez.

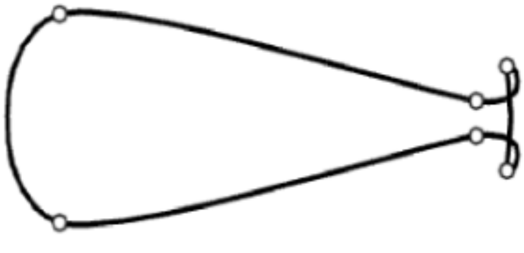
5. En généralisant ce calcul, on définit un pas d'un algorithme de subdivision pour un polygone fermé qui ajoute entre deux points consécutifs P_i et P_{i+1} un nouveau point $P_{i+0.5}$ barycentre des points $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ avec ces mêmes coefficients $(-1/16, 9/16, 9/16, -1/16)$ (on considère les indices circulaires). Faire un petit dessin en exemple si ça vous aide.
   En itérant ce processus, on obtient un algorithme de subdivision.

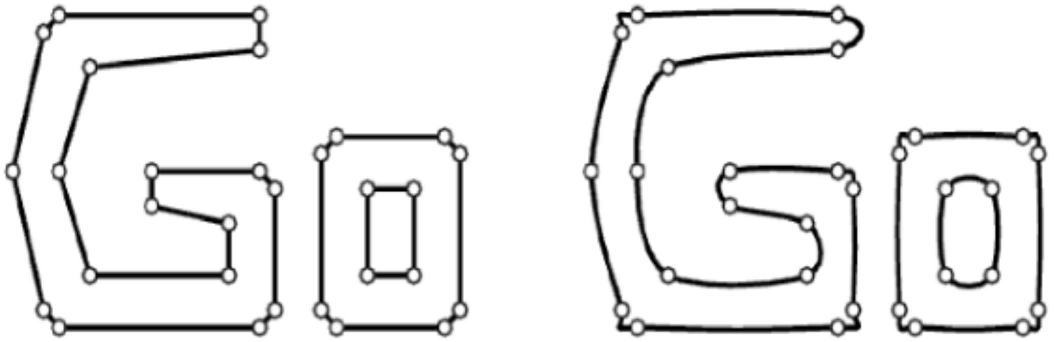
   (a) Donnez le pseudo code de cet algorithme.

   (b) On admet que la courbe limite est C^1. Justifiez que cette courbe interpole les points du polygone de contrôle de départ. C'est un algorithme de subdivision interpolant.

6. On suppose que le polygone de départ a des cotés de longueur très variable, comme sur la courbe limite donnée dans les deux exemples (à gauche le polygone de contrôle, à droite la courbe limite).







(a) Que constatez-vous pour la courbe limite?

(b) Proposez une adaptation de la subdivision pour obtenir une courbe limite plus lisse (par exemple en utilisant le résultat de la question 3).

2 Raccordement de deux courbes de Bézier

On considère 2 courbes de Bézier P et Q sur les intervalles $[0,1]$ et $[1,2]$ de degré 3.

1. Donner l'expression des points de contrôle en fonction des floraisons p et q. Pour chaque condition de raccordement on a une condition géométrique, et une égalité sur les floraisons.

   (a) Pour que P et Q soient C^0 en 1 quelle est la condition géometrique? la condition sur la floraison?

   (b) Montrer que si P et Q sont C^1 en 1, alors $p(1,1,.) = q(1,1,.)$ où

   $$p(1,1,.) : t \mapsto p(1,1,t).$$

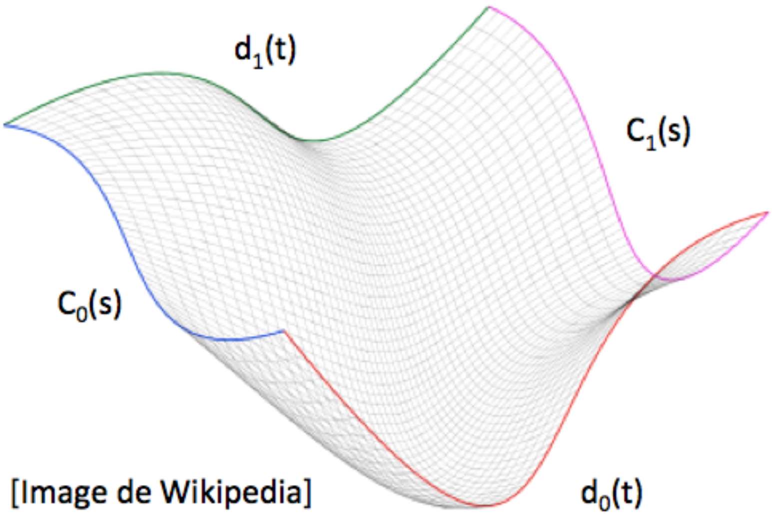
   Quelle est la condition géométrique correspondante?

   (c) Donner la condition géométrique et sur les floraisons pour que P et Q soient C^2 en 1.

2. On suppose maintenant que P et Q sont C^2 en 1, justifiez que le vecteur de noeuds de la spline définie par P et Q est $(0,0,0,1,2,2,2)$.

3. En déduire/exprimer les points de contrôle de la spline en fonction des points de contrôle de P et Q.

3 Carreaux de Coons



Étant données quatre courbes en 3D $c_0(s)$, $c_1(s)$, $d_0(t)$, $d_1(t)$ qui se rencontrent en quatre coins $c_0(0) = d_0(0)$, $c_0(1) = d_1(0)$, $c_1(0) = d_0(1)$, $c_1(1) = d_1(1)$; On définit une deux surfaces

$$L_c(s,t) = (1-t)c_0(s) + t\, c_1(s),$$

et

$$L_d(s,t) = (1-s)d_0(t) + sd_1(t).$$

1. Montrer que L_c et L_d interpolent chacune 2 des courbes du bord.

On souhaite maintenant trouver une surface qui interpole les 4 courbes. Le patch de Coons bilinéaire est la surface

$$C(s,t) = L_c(s,t) + L_d(s,t) - B(s,t),$$

où B est l'interpolation bilinéaire des quatre coins:

$$B(s,t) = c_0(0)(1-s)(1-t) + c_0(1)s(1-t) + c_1(0)(1-s)t + c_1(1)st.$$

2. Justifiez le fait que la surface C interpole les 4 coins, puis les 4 courbes-bords.