Examen de l'UE
Éléments d'analyse numérique

Session 1

Documents autorisés :
2 pages A4 recto-verso

Les 2 parties sont à rédiger sur des feuilles différentes

1 Partie Interpolation et approximation

▷ **Exercice 1. Courbes de Hermite** (4.5 points)
Une courbe de Hermite paramétrique est une courbe entre deux points donnés A et B, dont on définit une direction tangente en chacun de ces points, par deux droites D_A et D_B passant resp. par A et B. Soit P un polynôme tel que $P(0) = A$ et $P(1) = B$ et P soit tangent à D_A en A, et D_B en B. On appelle p sa floraison.

1.1. Montrer que la fonction $t \mapsto p(., 0 \dots 0)$ où 0 apparait $n-1$ fois, est une paramétrisation de la droite D_A.

1.2. En déduire que l'on peut, en général, définir P comme étant une courbe de Bézier de degré 2.

1.3. On peut utiliser une suite de telles courbes de degré 2 pour créer une spline. Quels sont alors les points de contrôle de cette spline ?

▷ **Exercice 2. Surfaces interpolantes en produit tensoriel** (3 points)

2.1. Vous avez implémenté un algorithme d'interpolation de courbes paramétriques. Rapellez les entrées nécessaires à votre algorithme/fonction pour calculer une courbe passant par des points donnés en 3D, et rappelez le contrat de cette fonction.

2.2. Expliquer comment définir une surface interpolante paramétrique en produit tensoriel. Quelles sont les entrées pour définir cette surface.

2.3. En vous appuyant sur votre fonction 1D, donnez le pseudo code pour définir cette surface.

▷ **Exercice 3. Degré d'un polynôme interpolant/approximant** (1.5 points) Quel est l'intérêt ou désavantage d'augmenter le degré pour faire de l'interpolation polynomiale ? pour les courbes de Bézier ? pour les splines polynomiales ?

2 Partie équation différentielles ordinaires

▷ **Exercice 4.** [1] On considère le système contrôlé suivant (pendule inversé linéarisé où on contrôle le couple moteur et avec $g = l$)

$$\ddot{\theta}(t) - \theta(t) = u(t) \in \mathbf{R},$$

avec $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = -2$.

4.1. Écrire le système sous la forme

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

On donnera les matrices A et B.

4.2. Calculer e^{tA} à l'aide de la définition.

4.3. On considère le contrôle en boucle ouverte $u(t) = 3e^{-2t}$. Résoudre (IVP) avec les valeurs initiales $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = -2$.

4.4. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

avec comme condition initiale $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \varepsilon$. En déduite la solution de (IVP) avec $\theta(0) = 1, \dot{\theta}(0) = -2+\varepsilon$ et toujours pour le contrôle $u(t) = 3e^{-2t}$.

4.5. Commentaire.

▷ **Exercice 5.** On considère le système de Cauchy suivant

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

et un schéma de Runge-Kutta explicite à 3 étages :

1. Sontag 1.4, page 9

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Table 1 – *Tableau de Butcher.*

5.1. Écrire pour le premier pas $[t_0, t_1]$ les k_i et y_1 en fonction de h, des coefficients a_{ij} et b_j, de y_0 et des puissances de A.

5.2. On considère le cas du schéma de Heun donné par les coefficients

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Qu'obtient-on pour y_1 ? Pourquoi sans faire de calcul s'avait-on que l'on aurait cette formule pour y_1 (on rappelle que l'ordre du schéma de Heun est 3).

▷ **Exercice 6.** On considère le système à condition initiale suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -y_1(t) \\ y_1(0) = x_0 \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

On pose $y^{(0)}(t) = y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout t.

6.1. Donner φ la fonction qui permet d'écrire l'équation différentielle sous la forme $\dot{y}(t) = \varphi(t, y(t))$. On donnera les espaces de départ et d'arrivée de la fonction ainsi que son expression.

6.2. Calculer les trois premières itérations $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ et $y^{(3)}$ du point fixe de la démonstration du théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz.

6.3. Donner l'expression des itérés $y^{(2k)}$ et de $y^{(2k+1)}$. Que retrouve-t-on ?