

Approximation et Modélisation Géométrique - Examen Nov. 2009

Je vous encourage à lire rapidement tout le sujet avant de commencer : les questions ne sont pas nécessairement par ordre croissant de difficulté. Vos réponses doivent être justifiées, mais concises.

Exercice 1 : Interpolation (5 points)

On souhaite définir une courbe paramétrique interpolante passant par les points $\{(0, 1); (1, 0); (0, -1); (-1, 0); (0, 1)\}$.

1. Est-ce un problème que la courbe passe deux fois par le point $(0, 1)$? (justifiez) (0.5 pt)
2. Quel est le degré de la courbe ainsi définie? (0.5 pt)
3. Donner une expression explicite d'une telle courbe. (1 pt)
4. Les points à interpoler sont sur le cercle unitaire; peut-on forcer la tangente en ces points à être la tangente au cercle? Comment? Donner le degré et expliquer (sans le faire explicitement) comment intégrer ces nouvelles contraintes. (2 pts)
5. Pour avoir une meilleure approximation du cercle on pourrait échantillonner plus finement en ajoutant plus de points à interpoler sur le cercle.
 - (a) Quel serait le résultat? (0.5 pt)
 - (b) Comment obtenir une courbe 'la plus lisse possible'? (0.5 pt)

Exercice 2 : Splines (7 points)

1. Expliquer pourquoi les splines ont sublimé les courbes de Bézier dans la pratique. (0.5 pt)
2. Quelle est la différence entre une spline uniforme, et une spline non uniforme. (0.5 pt)
3. Une fonction de la base de spline est caractérisée, à une constante près, par le fait qu'elle est de support minimum. Dessiner, puis trouver l'expression explicite de la fonction de base de degré 2 uniforme dont le support commence en 0 (à une constante près bien sûr). (2 pts)
4. Donner l'expression des autres fonctions de base, en fonction de celle de la question précédente (1 pt).
5. Imaginer que vous avez un problème d'interpolation fonctionnel en 2D; vous avez des points (x_i, y_i) , $i = 1 \dots k$. Expliquer en détail comment vous détermineriez (pseudo code à l'appui si nécessaire) une spline de degré 2 approximant ces points avec un critère aux moindres carrés. (3 pts)

Exercice 3 : Fat curves (6.5 points)

On définit une courbe de Bézier épaisse comme étant une courbe de Bézier dont les points de contrôle sont dans \mathbb{R}^4 :

$$P_i = (x_i, y_i, z_i, w_i).$$

Les 3 premières valeurs sont les coordonnées du point, et la dernière son poids, un réel positif, correspondant à l'épaisseur de la courbe à cet endroit.

1. Donner un pseudo code (matlab ou autre) de l'algorithme de de Casteljau permettant d'évaluer un point sur la courbe. (2 pts)
2. Quelle est la complexité de votre algorithme. (1 pt)
3. En supposant que vous ayez une fonction d'affichage capable de vous afficher un cône à partir de 2 points et 2 rayons, écrire un pseudo code pour afficher une approximation de votre courbe. (1 pt) Quel(s) est (sont) le(s) problème(s) de cet affichage? (1 pt)
4. Rappeler ce qu'est une paramétrisation régulière. (0.5 pt)
5. Si la paramétrisation est régulière et C^1 , la courbe épaisse est-elle forcément lisse (justifier). (1 pt)

Exercice 4 : Modélisation de surfaces (2 points)

On souhaite interpoler une grille de points (P_{ij}) , $i = 0 \dots n$, $j = 0 \dots m$.

1. Proposer un modèle de surface pour cela. (1 pt)
2. Exprimer comment déterminer un point sur la surface (1 pt)