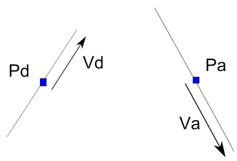
Document autorisé: une feuille A4 manuscripte recto-verso + poly de Mr Berger
Durée: 1h45

Approximation et Modélisation Géométrique

Je vous encourage à lire rapidement tout le sujet avant de comencer : les questions ne sont pas nécessairement par ordre croissant de difficulté. Vos réponses doivent être justifiées, mais conscises.

Exercice 1 : Courbes dites “de Hermite” (5 points)

Souvent, les logiciels de dessin incorporent un modèle de courbes de forme libre appelées ’courbes de Hermite’ : ce sont des courbes polynomiales de degré minimum, définies par un point de départ P_d, un point d’arrivée P_a, et un segment tangent en chacun de ces points. On appelle $\vec{v_d}$ et $\vec{v_a}$ les vecteurs correspondants aux demi segments ; ces vecteurs sont les vecteurs dérivées au départ et à l’arrivée.



1. Quel est le degré d’une telle courbe ? (0.5 pt)
2. Si l’on prend $P_d = (-1, 0)$, $P_a = (0, 1)$, $\vec{v_d} = (0, h)$ et $\vec{v_a} = (0, -h)$. Trouvez (et justifiez) l’expression de la courbe F ainsi définie (i.e. telle que $F(a) = P_a$, $F(b) = P_d$, $F'(a) = \vec{v_d}$ et $F'(b) = \vec{v_a}$ - vous pouvez fixer a et b comme vous le souhaitez). (2 pts)
3. Comment choisir h pour que $F(\frac{a+b}{2}) = (0, 1)$. (1 pt)
   (a) La tangente en $\frac{a+b}{2}$ est-elle horizontale ? (0.5 pt)
   (b) La courbe ainsi définie est-elle un demi cercle ? (1 pt)

Exercice 2 : Des splines à Bézier (4 points)

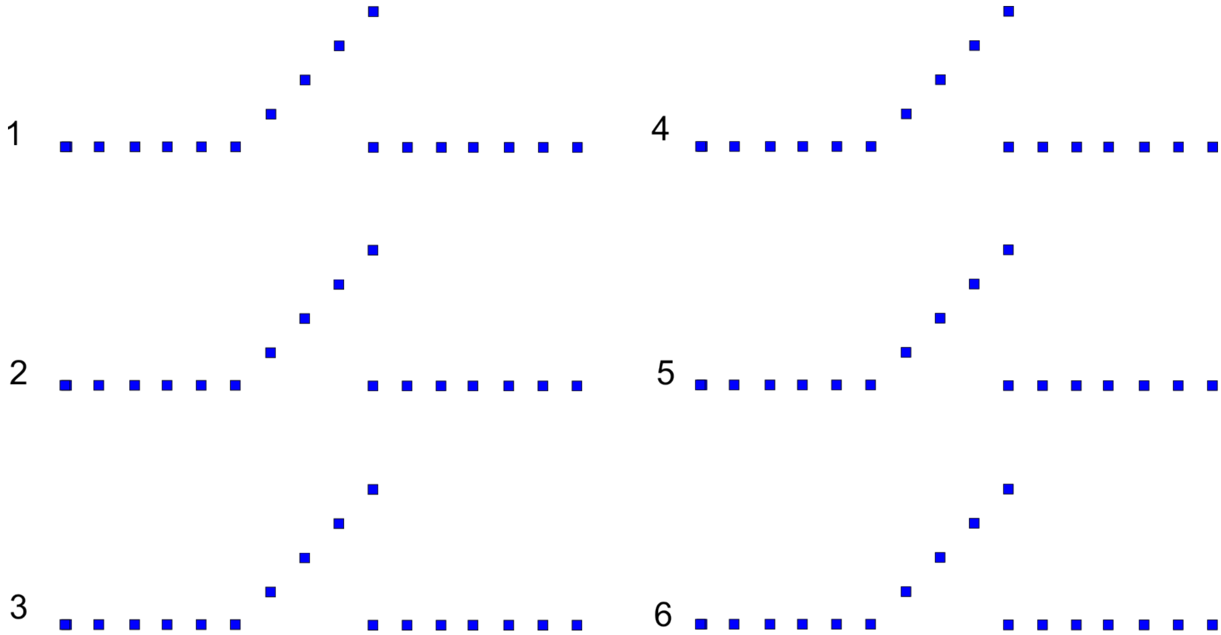
On considère une spline de degré 2, avec le vecteur de noeuds $(0, 0, 1, 2, 3, 3)$ et les points de contrôle $P_i = (i, (-1)^i)$, pour $0 \leq i \leq k$.

1. Combien y a-t-il de points de contrôle pour cette spline (i.e. que vaut k) ? (justifiez). (0.5 pt)
2. Certains des points sont-ils interpolés ? (0.5 pt)
3. Cette spline est un polynôme par morceaux sur les intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, 3]$. Trouvez les points de contrôle (Bézier) sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$. (2 pts)
4. Faites une jolie figure montrant les points de contrôle de la spline, et ceux de Bézier sur les deux premiers intervalles. (1 pt)

Exercice 3 : Différents modèles (8 points)

On considère les points de la figure ci dessous. Pour chacun des modèles proposés, dessinez une allure de la courbe correspondante, puis, commentez la qualité de l’approximation obtenue (1 phrase) et justifiez cette qualité au regard des propriétés du modèle utilisé (1 phrase).

1. Interpolation de Lagrange en interpolant les points donnés à des temps uniformes, e.g. $t_i = i$. (1 pt)
2. Interpolation de Lagrange en interpolant les points donnés à des abscisses de Chebychev. (1 pt)
3. On considère les points comme les points de contrôle d’une courbe polynomiale. (1 pt)
4. On considère les points de contrôle comme ceux d’une spline uniforme ouverte de degré 1. (1 pt)
5. On considère les points de contrôle comme ceux d’une spline uniforme ouverte de degré 2. (1 pt)
6. On considère les points de contrôle comme ceux d’une spline uniforme ouverte de degré 3. (1 pt)



Pour chacun les cas 1 et 3 : la courbe est-elle une courbe fonctionnelle (i.e. de la forme $y = f(x)$) ou paramétrique ? (justifiez !) (2 pts)

Exercice 4 : Modélisation de surfaces (3 points)

Rappellez brièvement en quoi consiste :

1. une surface de Bézier en produit tensoriel, (1 pt)
2. une surface de Bézier à patches triangulaires. (1 pt)
3. Donnez 2 différences (précises et concises) entre ces modèles. (1 pt)