Approximation et Modélisation Géométrique

Examen du 8 Avril 2008

Exercice 1 : Courbes et surfaces implicites et paramétriques (3 points)

Donner un exemple de

1. courbe paramétrique, (0.5 pt)
2. courbe implicite, (0.5 pt)
3. surface paramétrique, (0.5 pt)
4. surface implicite. (0.5 pt)

Donner un exemple d'utilisation de modèle de surface où une représentation implicite est plus adaptée qu'une représentation paramétrique, et inversement, un exemple d'utilisation où une surface paramétrique est plus adaptée qu'une surface implicite. (1 pt)

Exercice 2 : Algorithme de Neville (6 points)

Soit $(t_i)_{i=0}^n$ un ensemble de réels distincts, et $(Q_i)_{i=0}^n$ des points de l'espace. On définit récursivement des fonctions $P_{j,j+1,\dots,k}(t)$, $j \leq k$ telles que

– $P_j(t) = Q_j$, $j = 0 \dots n$,

– Pour $j < k$, $P_{j,j+1,\dots,k}(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_j} P_{j,j+1,\dots,k-1}(t) + \frac{t - t_j}{t_k - t_j} P_{j+1,j+2,\dots,k}(t)$.

1. Montrer que $P_{j,j+1,\dots,k}(t)$ est une fonction bien définie dont vous donnerez l'espace de départ et d'arrivée. (1 pt)
2. Montrer que $P_{j,j+1,\dots,k}(t)$ est une fonction polynomiale en t, et donner son degré (0.5 pt).
3. Montrer que $P_{j,j+1,\dots,k}(t)$ interpole les points Q_i en les valeurs t_i des paramètres, pour $i = j, \dots, k$. (3.5 pts)
4. Quelles valeurs donner aux paramètres t_i et aux points Q_i pour retrouver les fonctions de Lagrange ? (1 pt)

Exercice 3 : Courbe de Bézier (4 points)

On considère la courbe de Bézier f de points de contrôle $(-1,-2)$, $(1,2)$, $(-1,2)$ et $(1,-2)$.

1. Quel est le degré de la courbe de Bézier ainsi définie ? Quel est son degré de continuité ? (1 pt)
2. Exprimer la dérivée f' de f comme une courbe de Bézier, dans la base de Bernstein du degré de cette dérivée. (1 pt) -Vous n'avez pas à refaire le calcul générique de la dérivée d'une courbe de Bézier-.
3. De quelle nature (quels objets géométriques) sont les coefficients de f', et les images $f'(t)$? (1 pt)
4. Cette nouvelle courbe f' est appelée l'hodographe de f. Tracer l'hodographe de f. Que pouvez vous dire de $f'(0.5)$? (1 pt)
5. Tracer la courbe f, en illustrant les propriétés de tangence des courbes de Bézier. Que remarquez-vous en $f(0.5)$? Pouvez vous expliquer cela en regard de votre réponse à la question 1 ? (1 pt)

Exercice 4 : Splines - évaluation (2 points)

On considère une spline uniforme de degré 2, c'est à dire, de vecteur de noeuds $\mathbb{Z}$. Montrer que la courbe spline correspondant aux points de contrôle P_i, $i \in \mathbb{Z}$ passe par le milieu de chaque segment $[P_i, P_{i+1}]$. Vous pouvez par exemple utiliser la floraison pour évaluer la spline.

Document autorisé: une feuille A4 manuscripte recto-verso Durée: 1h45

Exercice 5 : Modélisation de surfaces (5 points)

1. Proposer un modèle de surface, et un algorithme (pseudocode) capable de générer de telles surfaces. Vous prendrez soin de détailler les paramètres d'entrée de votre algorithme. (3 pt)
2. Donner un exemple d'utilisation où ce modèle de surface est adapté, et un exemple d'utilisation pour lequel le modèle proposé est trop limité. (1 pt)
3. Calculer la complexité de votre algorithme, en fonction des paramètres d'entrée (ou du nombre de paramètre d'entrée.) (1 pt)