Examen de l'UE Éléments d'analyse numérique
Corrigé

1 Partie Équations différentielles ordinaires

2 Partie Interpolation et approximation

▷ **Exercice 1. Splines de Catmull-Rom** (4 points)
Les splines de Catmull-Rom sont des splines C^1 par morceaux, et chaque morceau peut être construit par l'algorithme de la figure 2.

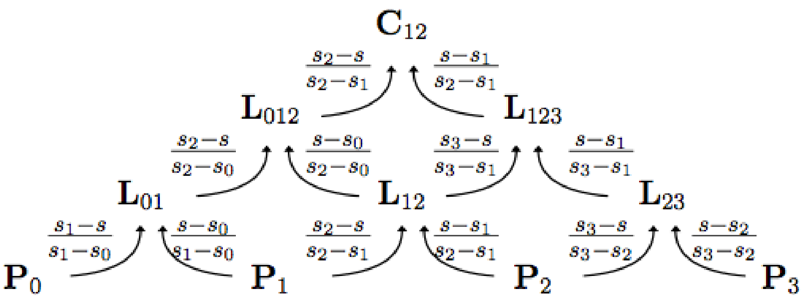

Figure 1 – Algorithme permettant d'obtenir un morceau de la courbe de Catmull-Rom.

1.1. 3 niveaux dans le schéma, chaque niveau est de degré 1 = degré 3.

1.2. On reconnait L_{012} (et L_{123}) les courbes de Lagrange de degré 2, interpolant P_0, P_1, P_2 en s_0, s_1, s_2 (et P_1, P_2, P_3 en s_1, s_2, s_3). Donc n'importe quelle combinaison affine de ces deux courbes interpole P_1 et P_2 en s_1 et s_2 resp. C'est le cas de C_{12}.

1.3. Voir interpolation dans le TP. Illustration dans la Figure 1, p. 2 de `http://faculty.cs.tamu.edu/schaefer/research/cr_cad.pdf`.

▷ **Exercice 2.** Surfaces de Bézier à patches triangulaires (2 points)

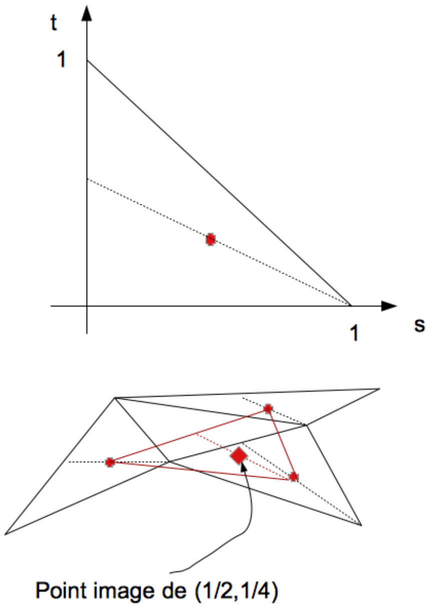

Figure 2 – Construction d'un point sur la surface.

2.1. Les courbes de bord du triangle ont les trois points de controle du bord. Ce sont des courbes de Bézier car la troisième coordonnée barycentrique est nulle.

2.2. Le point de paramètre $s = 1/2$, $t = 1/4$ est $P = 1/2(0,1) + 1/4(1,0) + 1/4(0,0)$. Pour la contruction voir figure 3

▷ **Exercice 3.** Spline (2 points)
Les points de contrôle d'une spline uniforme de degré 2 s'expriment en fonction de la floraison s comme $s(i, i+1)$ où $i \in \mathbb{N}$. Le milieu du segment entre deux point de contrôle consécutif est $1/2s(i, i+1) + 1/2s(i+1, i+2)$ qui vaut $s(i+1, i+1) = S(i+1)$ d'après les propriétés de la floraison.
De plus $s(i, i+1)$ et $s(i+1, i+2)$ sont sur la tangente en $i+1$ ($t \mapsto s(i+1, t)$) donc la courbe est tangente au segments du polygone de controle.