Approximation et Modélisation Géométrique

Correction - Examen Nov. 2010

Exercice 1 : Interpolation avec des fonctions polynomiales par morceaux

$L_{0,\dots,n}(t)$ le polynôme interpolant les points P_i en t_i pour $i = 0 \dots n$.

a. Le degré du polynôme est au minimum de n car il y a $n+1$ points à interpoler.

b. Soit le polynôme $P(t)$ définit par :

$$\frac{t_n - t}{t_n - t_0} L_{0,\dots,n-1}(t) + \frac{t - t_0}{t_n - t_0} L_{1,\dots,n}(t).$$

En t_0 il vaut $L_{0,\dots,n-1}(t_0) = P_0$. De même en t_n, il vaut $L_{1,\dots,n}(t_n) = P_n$. Pour $i = 1, \dots, n-1$, on a $L_{0,\dots,n-1}(t_i) = P_i$ et $L_{1,\dots,n}(t_i) = P_i$, d'où :

$$P(t) = \frac{t_n - t_i}{t_n - t_0} P_i + \frac{t - t_0}{t_n - t_0} P_i = P_i$$

Par unicité du polynôme de degré n interpolant $n+1$ points en $n+1$ valeurs données, $P(t) = L_{0,\dots,n}(t)$.

c.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
P_0 & & & & P_1 & & & & P_2 & & & & P_3 \\
 & \underset{\searrow}{\frac{t_1-t}{t_1-t_0}} & & \underset{\swarrow}{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}} & & \underset{\searrow}{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} & & \underset{\swarrow}{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}} & & \underset{\searrow}{\frac{t-t_2}{t_3-t_2}} & & \underset{\swarrow}{\frac{t-t_2}{t_3-t_2}} & \\
 & & L_{01}(t) & & & & L_{12}(t) & & & & L_{23}(t) & & \\
 & & & \underset{\searrow}{\frac{t_2-t}{t_2-t_0}} & & \underset{\swarrow}{\frac{t-t_0}{t_2-t_0}} & & \underset{\searrow}{\frac{t_3-t}{t_3-t_1}} & & \underset{\swarrow}{\frac{t-t_1}{t_3-t_1}} & & & \\
 & & & & L_{012}(t) & & & & L_{123}(t) & & & & \\
 & & & & & \underset{\searrow}{\frac{t_3-t}{t_3-t_0}} & & \underset{\swarrow}{\frac{t-t_0}{t_3-t_0}} & & & & & \\
 & & & & & & L_{0123}(t) & & & & & &
\end{array}$$

d. Cet algorithm a une compléxité de $0(n^2)$ en temps (nombre de fonctions intermédiaires à calculer, et peut être fait en $0(n)$ en place : comme pour De Casteljau on range les résultats itermédiaires dans la ligne précédente, c'est à dire en somme dans le tableau des points donné en entrée.

e. Les paramètres t_i influencent clairement la fonction interpolante :
- Toute transformation affine de l'ensemble des (t_i) produira la même courbe.
- On peut prendre une suite de (t_i) proportionnels à la longeur des segments (appelé par longueur de corde en TP) ou proportionnels à la racine de la longeur des segments (appelé par centripète en TP). Oui, cela améliore la qualité de la courbe, en particulier si les segments $[P_i, P_{i+1}]$ ont des longueurs bien différentes.
- Le choix optimale au sens de l'approximation, c'est à dire de la distance au polygone défini par les points est de prendre les abscisses de Tchebycheff.

B-splines.

a. Les splines définies pour un degré n et un vecteur de noeuds V sont les polynômes par morceaux de degré n, de continuité C^{n-k} en t_i quand t_i apparait k fois dans V. La base des B-splines sont de telles fonctions splines de support minimum telles que $\sum_k N_k^n(t) \equiv 1$.

b. On appelle $F(t)$ cette splines. Les points de contrôle sont $(f(0,0), f(0,1), f(1,2), f(2,3), f(3,3))$ où f est la floraison de F. On a
- $F(0) = f(0,0)$
- $F(1) = f(1,1) = 1/2(f(0,1) + f(1,2))$
- $F(0.5) = 1/2(f(0,0.5) + f(1,0.5)) = 1/2(1/2(f(0,0) + f(0,1)) + (3/4f(0,1) + 1/4f(1,2)))$.

– Sur l'intervalle $[2, 3]$:

$$F(t) = f(t,t) = (3-t)f(2,t) + (t-2)f(3,t)$$
$$= (3-t)[\frac{3-t}{2}f(1,2) + \frac{t-1}{2}f(2,3)] + (t-2)[(3-t)f(2,3) + (t-2)f(3,3)]$$

Catmull-Rom

a. C_n est de degré $2n-1$ car elle est une somme de produit de $L_{k,\ldots,k+n}(t)$ de degré n et $N_k^{n-1}(t)$ de degré $n-1$.

b. On a $N_k^{n-1}(t_i) \neq 0$ pour k tel que $k \leq i \leq k+n$. Donc :

$$C_n(t_i) = \sum_{j=i}^{i+n} N_j^{n-1}(t) L_{j,\ldots,j+n}(t_i).$$

c. On donne l'égalité suivante :

$$\sum_k N_k^{n-1}(t) L_{k,\ldots,k+n}(t) = \sum_k N_k^n(t) L_{k+1,\ldots,k+n}(t).$$

La courbe $C_1(t)$ est seulement C^0 car elle est de degré 1 c'est $C_2(t)$ (de degré 3) qui est de dérivée continue (donc C^1), comme N_k^2. Erreur dans le sujet... my mistake...

Exercice 2 : Carreaux de Coons (4 points)

– $f_1(s,t) = (1-t)f(s,0) + tf(s,1)$ et $f_2(s,t) = (1-s)f(0,t) + sf(1,t)$.
– On définit la surface finale $f(s,t)$ par :

$$f_1(s,t) + f_2(s,t) - ((1-s)(1-t)_; f(0,0) + (1-s)t\ f(0,1) + s(1-t)\ f(1,0) + st\ f(1,1).$$

  – Degré 2 en s et en t.
  – Il faut l'écrire, on ajoute et on retranche un terme linéaire.