Approximation et Modélisation Géométrique - Elements de correction

Exercice 1 : Courbes dites "de Hermite" (5 points)

1. Ces courbes sont de degré 3 (4 degrés de liberté).
2. On va exprimer cette courbe comme une courbe de Bézier, c'est à dire en déterminant ses points de contrôle, et en choisissant $a = 0$ et $b = 1$. Comme la courbe est de degré 3, la dérivée de le courbe en 0 est $3(P_1 - P_0) = \overrightarrow{v_d}$, d'où $P_1 = (-1, h/3)$. De même, la dérivée de la courbe en 1 est $3(P_3 - P_2)$ et donc $P_2 = (1, h/3)$.
3. D'après de Casteljau, $F(0.5) = (((P_0 + P_1)/2 + (P_1 + P_2)/2)/2 + ((P_1 + P_2)/2 + (P_2 + P_3)/2)/2)/2$ soit, l'ordonnée de $F(0.5)$ vaut $h/4$. Il faut donc prendre $h = 4$.
   (a) Oui, car les points de contrôle sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
   (b) Non, car c'est une courbe polynomiale paramétrique.

Exercice 2 : Des splines à Bézier (4 points)

1. Les points de contrôle correspondent aux valeurs de la floraison s en deux paramètres consécutifs du vecteur de noeuds : $s(0,0), s(0,1), s(1,2), s(2,3)$ et $s(3,3)$. Il y a donc 5 points de contrôle.
2. Le premier et le dernier point sont interpolés. C'est la propriété de la diagonale de la floraison.
3. Les points de Bézier sur l'intervalle $[0,1]$ sont $s(0,0)$, $s(0,1)$ et $s(1,1) = (s(0,1) + s(1,2))/2$ (propriété de multi-affinité de la floraison). Les points de Bézier sur l'intervalle $[1,2]$ sont $s(1,1), s(1,2)$ et $s(2,2) = (s(1,2) + s(2,3))/2$.

Exercice 3 : Différents modèles (8 points)

1. L'approximation de la courbe est mauvaise. Le degré est élevé et génére beaucoup d'oscillations.
2. L'approximation est meilleure, surtout autour du 'saut', mais le degré élevé reste un problème.
3. L'approximation 'lisse' trop la courbe. Le degré est élevé, et pour une courbe de Bézier cela signifie que l'influence des points est faible.
4. Approximation parfaite. Ce modèle correspond aux données qui sont issues d'une fonction continue linéaire par morceaux.
5. On suit bien la forme, mais on lisse les coins. La splines uniforme de degré 2 est C^1, contrairement aux données en entrée.
6. On lisse encore plus que le degré 2, pour être C^2, donc cela est encore moins bon.

Les données pourraient être issues de l'approximation d'une fonction $y = f(x)$ discontinue, mais 2 valeurs differentes sont données pour une même abscisse. Pour cette raison, et parce que le modèle est continu (dans le cas 1 et 3 en particulier) il est nécessaire de considérer une courbe paramétrique.

Exercice 4 : Modélisation de surfaces (3 points)

1. v. cours
2. v. cours
3. 2 différences, par exemple : tensoriel : degré indépendant en chaque variable, domaine carré. triangulaire : degré total n, domaine triangulaire.