Document autorisé: une feuille A4 manuscripte recto-verso Durée: 1h45

Approximation et Modélisation Géométrique

Examen du 8 Avril 2008 – Eléments de correction

Exercice 1 : Courbes et surfaces implicites et paramétriques (3 points)

1. courbe paramétrique : le cercle $P(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
2. courbe implicite : le cercle $\{P = (x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$,
3. surface paramétrique : la sphère $S(u, v) = (\cos u, \sin u * \cos v, \sin u * \sin v)$,
4. surface implicite : la spère $\{P = (x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Une représentation implicite est plus adaptée qu'une représentation paramétrique : étant donné un point $P = (x, y, z)$ déterminer si p est sur la surface. Inversement, une surface paramétrique est plus adaptée qu'une surface implicite si l'on souhaite échantilloner la surface (générer des points sur la surface).

Exercice 2 : Algorithme de Neville (5 points)

1. $P_{j,j+1,\ldots,k}(t)$ est une fonction bien définie car on fait des combinaisons affines de points (somme des coefs fait 1) ; c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans l'espace affine des points de l'espace.
2. $P_{j,j+1,\ldots,k}(t)$ est une fonction polynomiale de degré $k - j$ en t car les coefficients sont des polynômes de degré 1 en t et on applique $k - j$ fois la formule de récurence.
3. $P_{j,j+1,\ldots,k}(t)$ interpole les points Q_i en les valeurs t_i des paramètres, pour $i = j, \ldots, k$: par récurence.
4. Les paramètres t_i sont quelconques et les points $Q_i = \delta_{ij}$ pour retrouver la fonction de L_j (qui dépend des t_is).

Exercice 3 : Courbe de Bézier (3 points)

1. degré 3, C^∞.
2. f' a pour vecteurs de contrôle $3 * (2, 4), 3 * (-2, 0), 3 * (2, -4)$.
3. Les coefficients de f' sont des vecteurs car différence de points, et les images $f'(t)$ sont aussi des vecteurs (combinaison linéaire de vecteurs).
4. L'hodographe de f représente l'ensemble des vecteurs dérivés de f (les vecteurs partent toujours de 0). $f'(0.5)$ est le vecteur nul.
5. $f(0.5)$ est un piont de discontinuité, cela est possible car la paramétrisation est non régulière (le vecteur dérivé s'annule).

Exercice 4 : Splines - évaluation (2 points)

Soit S la spline, et la floraison s a 2 arguments. On a $S(i+1) = s(i+1, i+1) = 1/2(s(i, i+1) + s(i+1, i+2)) = (1/2(P_{i-1} + P_i)$. cqfd.

Exercice 5 : Modélisation de surfaces (5 points)

suivant votre projet.